

Title	Lie環ノ同型表現ニツイテ
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 2(3) p.1-p.6
Issue Date	1947-02-20
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75158">https://doi.org/10.18910/75158</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 23. Lie 環ノ同型表現ニツイテ

岩澤 健吉 (東大)

$F$ ヲ任意ノ可換体,  $L$ ヲ $F$ 上ノ Lie 環,  $A$ ヲ同ジク $F$ 上ノ普通ノ associative ナ環トスル. 但シ $L$ ,  $A$ ノ $F$ 上ノ rank ハ  $\infty$ デモヨイ.  $L$ カラ $A$ ノ中ヘノ写像

$$a \longrightarrow a' \quad ; \quad a \in L, \quad a' \in A$$

ガ次ノ條件ヲ満足スルトキコレヲ $L$ ノ $A$ ニ於ケル表現ト呼ブ: 即チ

$$\lambda a + \mu b \longrightarrow \lambda a' + \mu b'$$

$$[a, b] \longrightarrow [a', b'] = a'b' - b'a', \quad (\lambda, \mu \in F).$$

対応ガ符ニ「対」ノ場合, 即チ同型表現ニ因シテハ Witt, Birkhoff, Ado, Cartan 等ノ結果ガ知ラレテキル<sup>1)</sup>. 以下コレヲノ定理ニ代数的ナ別証ヲ子ヘ特ニ Ado, Cartan ノ結果ヲ任意ノ係数体 $F$ ノ場合ニ拡張スルコトヲ述ベル.

サテ $L$ ヲ $F$ 上ノ任意ノ Lie 環,  $N$ ヲ $L$ ノ abelian ideal トセヨ. コノトキ同ジク $F$ 上ノ Lie 環  $L^*$ ガ

- i)  $L^*$ ハ $L$ 及ビ abelian ideal  $N^*$ ヲ含ミ
  - ii)  $L^* = L + N^*$ ,  $L \cap N^* = N$ , 従ツテ  $L^*/N^* \cong L/N$  且
  - iii)  $L^*$ ハ $N^*$ 上ニ split (zerfallen) スル. 即チ  $L^*$ ハ
- $$L^* = L_1 + N^*, \quad L_1 \cap N^* = 0$$

ナル如キ部分環  $L_1$ ヲ含ム

トキ  $L^*$ ヲ $L/N$ ノ splitting Lie algebra ト呼ブ. コレハ普通ノ群論ニ於ケル E. Artin ノ Zerfallungsgruppe ノ定義ヲソノママ Lie 環論ノ言葉デ云ヒ直シタマデデアル. サウシテ群論ノ場合ニ於ケルト同様ニ次ノ定理ガ成立スル.

定理 1. 任意ノ $L$ 及ビソノ abelian ideal  $N$ ニ対シ上ノ如キ splitting Lie algebra  $L^*$ ガ存在スル.

定理 2. 特ニ $L$ ガ $F$ 上ニ有限ノ rank ヲ有スル場合ニハ同ジク $F$ 上ニ有限ノ rank ヲ有スル  $L^*$ ガ存在スル.

コノ定理 1, 2 ガ実ハ証明ノ essential ナ点ナノデアルガソレハ  
後ニ説明スルコトニシテ先ヅコノニツノ定理ヲ仮定スレバ初メニ述べ  
タル Lie 環ノ表現ノ問題ガ容易ニ解決サレルコトヲ示サウ。

サテ  $N^*$  ヲ  $F$  上ノ任意ノ linear space,  $N^*$  ニ於ケル  
linear transformation ノ全体ヲ  $T$  トスル。  $T$  モス  $F$   
上ノ linear space デアルカラ  $N^*$  ト  $T$  トノ linear space  
トシテノ直和ヲ

$$A = T + N^*$$

トスル。コノ  $A$  ノ元

$$u_1 = (\phi_1, v_1); \quad u_2 = (\phi_2, v_2); \quad \phi_i \in T, \\ v_i \in N^*$$

ノ間ニ乗法  $u_1 \cdot u_2$  ヲ

$$u_1 u_2 = (\phi_1 \phi_2, \phi_1(v_2))$$

ニヨリ定義スル。但シ  $\phi_1 \phi_2$  ハ linear transformation ト  
シテノ乗法,  $\phi_1(v_2)$  ハ  $\phi_1$  ニヨル  $v_2$  ノ象デアル。カクノ如キ  
定義ニヨリ  $A$  〆  $F$  上ノ associative ナ環トナルコトハ容易ニ確メ  
ルコトガ出来る。實際  $N^*$  ガ  $F$  上ニ有限ノ rank  $l$  ヲ有スル場合  
 $\phi, v$  ヲソレゾレ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in F, v_i \in F$$

ナル matrix 及ビ vector デ表セバ  $A$  ハ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} & v_l \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ナル  $l+1$  次ノ正方行列ガ行列ノ普通ノ加法、乗法ニ関シテツクル環  
ニ他ナラナイ。

今  $F$  上ノ任意ノ Lie 環  $L$  ヲトリソノ centre ヲ  $Z$  トセヨ

$x \rightarrow \tau(x)$  を  $L$  の正規表現

即ち

$$\tau(x)y = [x, y], \quad y \in L$$

トスレバコノ表現ニヨリ  $L/Z$  は isomorphe = 表現サレル.

$\tau(x)$  が generate スル  $F$  上ノ associative ナ環ヲ  $B$  トセヨ.

次ニ  $Z = N$  トシテ定理 1 ヲ用ヒレバ i), ii), iii) ヲ満足スル splitting Lie algebra  $L^*$  ガ存在スル. コノデ

$L_1 \cong L^*/N^* \cong L/N = L/Z$  デアルカラ  $L_1$  ハ上記  $B$  ノ中デ同型ニ表現サレル. 一方  $L_1$  ノ任意ノ元  $w$  ニ対シ

$$\sigma(w)v = [w, v], \quad v \in N^*$$

トイケバ  $\sigma(w)$  ハ  $N^*$  ノ linear transformation ヲ与ヘル

$$w \longrightarrow \sigma(w)$$

ハ明カニ  $L_1$  ノ  $T$  (コノ  $T$  ハ上ニ述バヌ  $N^*$  ノ linear transformation ノ全体ノツクル環) ニ於ケル表現ヲ与ヘル. 即ち

$$\sigma([w, w']) = \sigma(w)\sigma(w') - \sigma(w')\sigma(w)$$

ソコデ今  $L^* = L_1 + N^*$  カラ  $A = T + N^*$  へノ写像

$$a = w + v \longrightarrow (\sigma(w), v) \quad w \in L_1, v \in N^*$$

ヲ考ヘヨ. コレハ明カニ  $F$  上ノ linear ナ対応デアルガ  $N^*$  ガ abelian ナルコトニ注意スレバ

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= [w_1 + v_1, w_2 + v_2] = [w_1, w_2] + [w_1, v_2] \\ &\quad + [v_1, w_2] + [v_1, v_2] \\ &= [w_1, w_2] + \sigma(w_1)v_2 - \sigma(w_2)v_1 \end{aligned}$$

ニハ  $A$  ノ元

$$\begin{aligned} &(\sigma([w_1, w_2]), \sigma(w_1)v_2 - \sigma(w_2)v_1) \\ &= (\sigma(w_1)\sigma(w_2) - \sigma(w_2)\sigma(w_1), \sigma(w_1)v_2 - \sigma(w_2)v_1) \\ &= (\sigma(w_1)\sigma(w_2), \sigma(w_1)v_2) - (\sigma(w_2)\sigma(w_1), \sigma(w_2)v_1) \\ &= (\sigma(w_1), v_1)(\sigma(w_2), v_2) - (\sigma(w_2), v_2)(\sigma(w_1), v_1) \end{aligned}$$

ガ対応スルカラ、カクシテ Lie 環  $L^*$  ノ  $A$  ニ於ケル表現ヲ得ラレル.

コレト先ニ得タル、 $L$ ノ $B$ ニ於ケル表現トヲ組合セレバ $L^*$ ノ直和  
 $A+B$ ニ於ケル表現ガ得ラレルガコノ表現ハシカモ同型表現デアル。  
 何トナレバ $B$ 内ニ於ケル表現ニ於テハ $L$ ガ同型ニ表現セラレ $A$ 内ニ於  
 ケル表現ニ於テハ $N^*$ ガ同型ニ表現サレテアルカラ。以上ノ所論ハ先  
 ニ述ベタ如ク *matrix* ヲ書イテ見ルト明白デアル。トニカフコレニ  
 ヨリ次ノ定理ヲ得ル；

定理 3. (Witt-Birkhoff)  $F$ 上ノ任意ノ *Lie* 環 $L$ ハ適當ナ  
*associative* ナ環ノ中デ同型ニ表現サレル。

コレ道ハ定理 1 ガケシカ用ヒナカツタガ定理 2 ヲモ用ヒルコトニ  
 スレバ $L$ ガ $F$ 上ニ有限ノ *rank* ヲ有スル場合ニハ特ニ $L^*$ トシテ同  
 ジク $F$ 上ニ有限ノ *rank* ヲ有スルモノガトレルカラ上ノ $A, B, \pi$   
 等モ又凡テ $F$ 上ニ有限ノ *rank* ヲ有スル。ヨツテ

定理 4.  $F$ 上ニ有限ノ *rank* ヲ有スル任意ノ *Lie* 環 $L$ ハ同ジク  
 $F$ 上ニ有限ノ *rank* ヲ有スル *associative* ナ環ノ中デ同型ニ表  
 現サレル。特ニソレハ $F$ 上ノ *matrix* デ同型表現ガ出来ル。

コレハ Ado-Cartanノ定理ノ任意ノ係数体トニ於ケル場合ハノ  
 拡張デアル(尤モ *characteristic* 0 ノ場合ハ *essential* ハ  
 Ado-Cartanノ定理ヲ書キテアルワケデアルガ)

カクシテ問題ハ結局定理 1, 2 ヲ証明スルコトニ帰着スル。定理 1  
 ハ成立スルコトハ H. Zassenhaus<sup>2)</sup> が既ニ注意シテアル。実  
 際ソレハ *Lie* 環ノ拡大ニ関スル *factor set* ノ理論(安倍亮氏；  
 本誌上談話会 226 (1941)) ヲ用ヒレバ群論ノ場合ト同様ニ比較  
 的 *formal* ナ計算タケデ証明サレル。然シソレカラ直チニ定理 2 ヲ  
 導クト云フワケニハ行カナイ。ソレハ丁度 Witt-Birkhoffノ結  
 果カラ直チニ Ado-Cartanノ定理ガ出テ来ナイノト同様デアル。

定理 2ノ証明ヲ詳シク述ベルコトハ長クナルカラ止メニジテ以下ソ  
 ノ方針ダケヲ略述スル。先ヅチヘラレタ $F$ 上ニ有限ノ *rank* ヲ有ス  
 ル $L$ 、 $N$ ニ対シ定理 1 ニヨリ *splitting Lie algebra*  $L_0$   
 及ビソノ *abelian ideal*  $N_0$  ヲツクル。コハデモシ $L_0$ 内ニ

$$N_0 \cong M_0, [N_0 : M_0]^{(3)} < \infty, M_0 \cap N = 0$$

ナル条件ヲ満足スル  $L_0$  の ideal  $M_0$  が存在スルコトヲ云ヘレバ

$L^* = L_0 / M_0$  トオクコトニヨリ定理 2 が成立スルコトが容易ニワカル<sup>4)</sup> コノ様ナ  $M_0$  の存在ヲ証明スル爲ニ  $F$  の標数が 0 の場合ト

$p \neq 0$  の場合トヲ分ケテ考ヘル。標数  $p$  の場合ニハ先ヅ手ヘラレタ  $L$  ヲ  $L$  ヲ含ム適当ナ  $W$  デオキカヘテ容易ニ証明ガ出来ルガ標数 0 の時ニハ  $L$  が *nilpotent* ナ場合, *soluble* ナ場合, 一般ノ場合ト三段ニ分ケテ証明シナケレバナラナイ。ソレハ *Cartan* ノ証明ニ於ケルト同様デアル。(但シコノデハ勿論全ツ代数的ニ) コノデ *Levi* ノ定理ヤ *semi-simple* ナ *Lie* 環ノ表現論等ヲ用ヒネバナテヌノデアルガ尚コノ点ニツイテハモツト簡單ナ証明ガ出来ルノデハナイカト思ツテキル。

トモカク上ノ如クニシテ  $M_0$  の存在ガ云ヘテ定理 2 が証明サレル。定理 2 ハ定理 4 ノ証明ノ手段トシテバカリデナク、特ニ標数  $p$  ノトキニハ標数 0 の場合ノ *Levi* ノ定理ノ代用トシテモ若干興味ガアルト思フ、實際標数  $p$  ノトキニハ *Levi* ノ定理ニ相当スル定理ハ成立シナイノデアルガ定理 2 ヲサシク一般化シテコレニ代用サセルコトガ出来ル。尚又定理 2 ヲ用ヒレバ標数  $p$  の場合ニハ, *semi-simple* ナ *Lie* 環ノ表現デ *completely reducible* デナイモノが存在スルコトナドモ云ヘル、コレヲニツイテハ又後ニ述ベルコトニスル。

註.

- 1) 後ニ述ベル定理 3, 4 参照。文献トシテハ例ヘバ *Birkhoff* (*Ann. of Math.* 38 (1939)) *Cartan* (*Jour. de Math.* 17 (1938)) 等
- 2) *Bassenhau* (*Hamb. Abh.* 13 (1939))
- 3)  $[N_0 : M_0]$  ハ  $N_0 / M_0$  上ノ rank.
- 4) コノコトハ *Witt-Birkhoff* ノ定理カラ *Ado-Cartan* ノ結果ヲ導カウトスル場合デモ同様デアル。但シソノ場合ニハ  $M_0$  トシテハ *associative ring* 中ノ両側 ideal ヲトラホ

バナラナイ。Lie環ノ中デハ *ideal* ハ必然的ニ凡テ両側 *ideal* デ  
コノコトガ議論ヲ容易ニシテキル様ニ思フ。

(1947. 1. 3 受付)